Transformada de Laplace de potencias de la función sinc

Laplace transform of powers of the sinc function

Rimer Zurita

Correo de correspondencia : mauriciozurita.o@umss.edu

Resumen

En este trabajo se hallan expresiones generales para la transformada de Laplace de potencias de la función sinc. Los resultados obtenidos se expresan en términos de funciones usuales tales como logaritmos, arcotangente y funciones racionales. De esta manera estas expresiones pueden ser incluidas en la literatura general para el cálculo de transformadas de Laplace. La implementación de los resultados del articulo resultan bastante eficientes en el tiempo de cómputo comparándolos a los establecidos por el software MATHEMATICA.

Palabras clave: *Transformada de Laplace, seno cardinal, potencias de la función sinc.*

Abstract

In this work general expressions for the Laplace transform of powers of the function sinc are found. The obtained results are expressed in terms of usual functions such as logarithms, arctangent, and rational functions. In this way these expressions can be included in the general literature for the calculation of Laplace transform. The implementation of the results of the article are quite efficient in computational time compared to those established by the MATHEMATICA software.

Keywords: *Laplace transform, sampling function, power of the sinc function.*

1. Introducción

Sea $f(t)$ una función definida para $t \geq 0$ y de orden exponencial. Definimos su transformada de Laplace como una función s en dada por la transformada integral

$$L\big(f(t)\big)(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt, \quad \Re(s) > \sigma_0,$$

para cierto σ_0 real.

En el presente artículo se denotará $\mathcal{L}(f(t))$ evaluada en s o $F(s)$ como la transformada de Laplace de una función $f(t)$ cualquiera. De manera general nos interesaremos en el caso $s \in \mathbb{R}$.

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias y Tecnología , Universidad Mayor de San Simón, Cochabamba - Bolivia.
https://orcid.org/0000-0002-3539-3479
Recibido: 10 de junio de 2024. Aceptado: 29 de noviembre de 2024

La transformada de Laplace tiene muchas aplicaciones en ciencia e ingeniería, principalmente al tratar de resolver ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales lineales, transformando estas en ecuaciones algebraicas que resultan más accesibles en cuanto a su manipulación y análisis.

La función $\operatorname{sinc}(t)$ muy conocida se define por:

$$\operatorname{sinc}(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t = 0; \\ \dfrac{\sin(t)}{t}, & \text{si } t \neq 0. \end{cases}$$

Esta función es muy usada en procesamiento digital de señales o en teoría de la información.

En el presente trabajo, en el Teorema 1, se obtiene resultados explícitos para la transformada de Laplace de potencias de esta función en términos de funciones elementales usuales como ser funciones polinomiales, arco tangentes y logaritmos.

$$\mathcal{L}(\operatorname{sinc}^n(t)), \quad n \geq 1, \tag{1}$$

Para el caso $n = 1$ el resultado que sigue es bastante conocido, puede ver por ejemplo el apéndice del libro de (Zill, 2014)

$$\mathcal{L}(\operatorname{sinc}(t)) = \arctan\left(\frac{1}{s}\right),$$

Para el caso $n = 2$ se conoce el resultado que sigue, puede ver por ejemplo la ecuación 3.948 del libro de (Gradshteyn & Ryzhik, 2007)

$$\mathcal{L}(\operatorname{sinc}^2(t)) = \arctan\left(\frac{2}{s}\right) - \frac{s}{4}\log\left(\frac{s^2+4}{s^2}\right).$$

Sin embargo, para $n \geq 3$ y luego de una búsqueda exhaustiva de resultados generales explícitos para (1), no se hallaron estos en términos de funciones elementales. Se puede consultar por ejemplo los libros conocidos (Oberhettinger & Badii, 1973) y (Spiegel, 1965) donde se muestran tablas completas de transformadas de Laplace en general.

En (AlHamad,2020) el autor encuentra un resultado para la transformada de Laplace de un producto de funciones de la forma,

$$\mathcal{L}(f(t)G(t)),$$

donde $f(t)$ es una función en t. y $G(t)$ es la transformada de Laplace de otra función g. En este artículo AlHamad muestra varios ejemplos para transformadas explicitas de productos o cocientes de funciones como $\mathcal{L}\left(\frac{1-\cos t}{t^2}\right)$ o $\mathcal{L}\left(\frac{\sin t - t\cos t}{t^3}\right)$, sin llegar a establecer resultados generales para cocientes de potencias más grandes de senos o cosenos y de t.

En (Glasser, 2021) se establece un resultado general para la transformada de Laplace de potencias del valor absoluto de la función sinc

$$\int_0^\infty \left|\frac{\sin(t)}{t}\right|^p e^{-st}\, dt,$$

con p entero positivo. El resultado obtenido se encuentra en términos de otras integrales que resultan calculables en términos de funciones elementales para el caso p par y difíciles de tratar para el caso p impar.

En (Abel & Kushnirevych, 2023), los autores encuentran un resultado general para la transformada de Fourier de potencias de la función sinc, más precisamente para $n = 2$ entero y ξ real

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^n t}{t^n} e^{i\xi t} dt = \frac{\pi}{2} B_{n-1}\left(\frac{\xi + n}{2}\right) + \frac{i}{2^n(n-1)!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} (\xi - n + 2k)^{n-1} \log|\xi - n + 2k|,$$

donde $B_{n-1}(x) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (x-k)_+^{n-1}$. En este artículo, los autores realizan una reseña histórica bastante completa sobre el cálculo de integrales relacionadas a la función sinc e indican que tales resultados aparecen rara vez en la literatura.

El software Mathematica 11 logra calcular transformadas de Laplace de potencias de la función sinc en términos de funciones logarítmicas evaluadas en valores complejos y la constante de Euler-Mascheroni γ, debiendo estas ser aún simplificadas en términos de funciones reales elementales. Además, el tiempo de cálculo de este software para tales transformadas es bastante superior a los del Teorema 1 implementados en el mismo. Por ejemplo, el resultado obtenido por este software para la transformada de Laplace de la tercera potencia de la función sinc y con un tiempo de cálculo de 1.984 segundos es el siguiente

$$\frac{1}{16}\Big(6(s^2-1)\operatorname{arccot}(s) + s(6\log(s-i) + 6\log(s+i) + (-6-is)\log(s-3i) + i(s+6i) \cdot \log(s+3i)) + 18\operatorname{arccot}\left(\frac{s}{3}\right)\Big).$$

Comparándolo al tiempo de cálculo del resultado implementado para el Teorema 1, este último prácticamente es nulo. De igual forma para potencias n mayores de la función sinc se obtienen resultados con tiempos de cálculos más y más grandes. Por ejemplo, el mencionado software arroja sus resultados con tiempos de cálculo iguales a 11. 625 y 17.734 segundos para potencias $n = 25$ y $n = 42$ respectivamente. Para los mismos casos los tiempos que arrojan la implementación de los resultados del Teorema 1 son de aproximadamente 0 y 0.0156 segundos respectivamente.

De esta manera el resultado principal del artículo dado en el Teorema 1, podría ser incorporado para actualizar algoritmos de cálculo de las transformadas de Laplace de potencias de la función $\operatorname{sinc}(t)$ o en su defecto para estudiar propiedades analíticas de estos de una manera más cómoda.

2. Métodos

Para $n \geq 1$ entero se sabe que la función Gamma de n es por definición,

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t}\, dt.$$

Haciendo el cambio de variable $t = ux$ con $x > 0$ fijo se tiene,

$$\Gamma(n) = x^n \int_0^\infty u^{n-1} e^{-ux}\, du,$$

entonces

$$\frac{1}{x^n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty u^{n-1} e^{-ux}\, du; \quad x > 0, n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Supongamos que queremos hallar $\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t^n}\right)$ para $n \geq 1$ entero y para cierta función $f(t)$ cuya transformada *F(s)=L(f(t))* se conozca. Haciendo cálculos y usando (2) obtenemos,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t^n}\right) &= \int_0^\infty \frac{f(t)}{t^n} e^{-st}\, dt = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty f(t) e^{-st} \int_0^\infty u^{n-1} e^{-ut}\, du\, dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty u^{n-1} \int_0^\infty f(t) e^{-(s+u)t} dt\, du,\end{aligned}$$

entonces

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t^n}\right) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty u^{n-1} F(s + \mathrm{u})\, du = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_s^\infty (y - s)^{n-1} F(y)\, dy. \tag{3}$$

Por lo tanto, $\int_s^\infty (y - s)^{n-1} F(y)\, dy$ si fuese integrable obtendríamos la transformada de Laplace de $\frac{f(t)}{t^n}$. Por ejemplo, se sabe que si $f(t) = \sinh^2(t)$, entonces $F(s) = \dfrac{2}{s(s^2-4)}$ para $s > 2,$ usando (3) con $n = 2$ se obtiene,

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sinh^2(t)}{t^2}\right) = 2 \int_s^\infty \frac{(y - s)}{y(y^2 - 4)}\, dy,$$

que descomponiendo en suma de fracciones parciales resulta,

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sinh^2(t)}{t^2}\right) = \operatorname{arctanh}\left(\frac{2}{s}\right) + \frac{s}{4}(-2\log(s) + \log(s^2 - 4)), \quad s > 2.$$

Por la discusión anterior, como primer resultado vamos a hallar $\mathcal{L}(\sin^n(t))$. Para esto, sea $I_n(s) := \int_0^\infty \sin^n(t) e^{-st}\, dt$. Observamos que $I_n(s)$ es la transformada buscada. Hallemos una relación recursiva para $I_n(s)$. Por integración por partes se tiene que para $s > 0$,

$$I_n(s) = \frac{n}{s} \int_0^\infty \sin^{n-1}(t) \cos(t) e^{-st}\, dt,$$

procediendo una vez más por integración por partes se tiene,

$$I_n(s) = \frac{n}{s^2}((n-1)I_{n-2}(s) - nI_n(s)),$$

entonces

$$I_n(s) = \frac{n(n-1)}{n^2+s^2} I_{n-2}(s), \quad n \geq 0.$$

Como casos iniciales tenemos que,

$$I_0(s) = \frac{1}{s}; \quad I_1(s) = \frac{1}{s^2+1}.$$

Por lo tanto

$$I_n(s) = \begin{cases} \dfrac{n!}{s(s^2+n^2)(s^2+(n-2)^2)\cdots(s^2+2^2)}, & \text{si } n \text{ es par ;} \\ \dfrac{n!}{(s^2+n^2)(s^2+(n-2)^2)\cdots(s^2+1^2)}, & \text{si } n \text{ es impar .} \end{cases} \tag{4}$$

Nótese que en la expresión anterior n va disminuyendo de dos en dos.

3. Resultados y discusión

Queremos hallar para $n \in \mathbb{N}$, y $a > 0$ la transformada de Laplace $\mathcal{L}\left(\frac{\sin^n(at)}{t^n}\right)$. El siguiente resultado es el principal del presente artículo y respecta al cálculo de esta transformada.

Teorema 1

Para $a > 0$ y $s > 0$ se tiene que la Transformada de Laplace $\mathcal{L}\left(\frac{\sin^n(at)}{t^n}\right)$ es igual a:

Si n es par,

$$\frac{as^{n-2}}{2^n(n-1)!}\left(\sum_{j=1}^{n/2}(-1)^j\binom{n}{n/2-j}\left(-4\mathrm{j}\arctan(2ja/s)\sum_{l=0}^{n/2-1}(-1)^l\binom{n-1}{2l+1}(2ja/s)^{2l}\right.\right.$$
$$\left.+(s/a)\log\left(\left(\frac{s}{a}\right)^2+4j^2\right)\sum_{l=0}^{n/2-1}(-1)^l\binom{n-1}{2l}(2ja/s)^{2l}\right)$$
$$\left.+\binom{n}{\mathrm{n}/2}\left(\frac{s}{a}\right)\log\left(\frac{s}{a}\right)\right),$$

Si n es impar,

$$\frac{(-s)^{n-1}}{2^n(n-1)!}\sum_{j=1}^{(n+1)/2}(-1)^{j-1}\binom{n}{(n+1)/2-j}$$
$$\cdot\left(2\arctan\left(\frac{(2j-1)a}{s}\right)\sum_{l=0}^{(n-1)/2}(-1)^l\binom{n-1}{2l}\left(\frac{(2j-1)a}{s}\right)^{2l}\right.$$
$$\left.+\log\left((s/a)^2+(2j-1)^2\right)\sum_{l=0}^{(n-3)/2}(-1)^l\binom{n-1}{2l+1}\left(\frac{(2j-1)a}{s}\right)^{2l+1}\right).$$

Prueba. Sea $J_n(s) := \int_0^\infty \frac{\sin^n(t)}{t^n}e^{-st}\,dt$. Observamos que $J_n(s)$ es la Transformada de Laplace $\mathcal{L}\left(\frac{\sin^n(t)}{t^n}\right)$.La idea es hallar primeramente esta transformada para luego usar la propiedad general $\mathcal{L}(f(at)) = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$.
Tenemos por (2), recordando que $\Gamma(n) = (n-1)!$, y para $s > 0$,

$$J_n(s) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty\left(e^{-st}\sin^n(t)\int_0^\infty u^{n-1}e^{-ut}\,du\right)dt$$
$$= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty\left(u^{n-1}\int_0^\infty e^{-(s+u)t}\sin^n t\,dt\right)du = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty u^{n-1}I_n(s+u)\,du,$$

donde la función I_n está dada en (4).
Haciendo el cambio de variable $s+u=y$, se tiene

$$J_n(s) = \frac{1}{(n-1)!}\int_s^\infty (y-s)^{n-1}I_n(y)\,dy.$$

Caso 1: Si n es par.
Usando (4) se tiene,

$$\begin{aligned} J_n(s) &= \frac{1}{(n-1)!}\int_s^\infty \frac{n!\,(y-s)^{n-1}}{y(y^2+n^2)(y^2+(n-2)^2)\cdots(y^2+2^2)}\,dy \\ &= \frac{n}{2^n}\int_{s/2}^\infty \frac{(2z-s)^{n-1}}{z(z^2+1^2)(z^2+2^2)\cdots(z^2+(n/2)^2)}\,dz. \end{aligned} \tag{5}$$

Descomponemos el integrando en suma de fracciones parciales en esta última expresión,

$$\frac{(2z-s)^{n-1}}{z(z^2+1^2)(z^2+2^2)\cdots(z^2+(n/2)^2)} = \frac{A_0}{z}+\frac{A_1z+B_1}{z^2+1^2}+\frac{A_2z+B_2}{z^2+2^2}+\cdots+\frac{A_{n/2}z+B_{n/2}}{z^2+(n/2)^2} \tag{6}$$

Multiplicando (6) por z y luego haciendo $z = 0$ se tiene,

$$A_0 = \frac{(-s)^{n-1}}{(n/2)!^2}. \tag{7}$$

De la misma manera, multiplicamos (6) por $(z^2 + j^2)$ para todo $1 \leq j \leq n/2$, y luego haciendo $z = \pm ji$ con i el número imaginario puro, se obtiene el sistema

$$\begin{cases} (jA_j i + B_j)(ji)(1^2 - j^2)(2^2 - j^2) \cdots ((n/2)^2 - j^2) = (2ji - s)^{n-1} \\ (-jA_j i + B_j)(-ji)(1^2 - j^2)(2^2 - j^2) \cdots ((n/2)^2 - j^2) = (-2ji - s)^{n-1}, \end{cases} \tag{8}$$

en la productoria de este sistema no se consideran los factores nulos. Podemos simplificar este producto de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} &(1^2 - j^2)(2^2 - j^2) \cdots ((n/2)^2 - j^2) \\ &= (-1)^{j-1}(j^2 - 1^2)(j^2 - 2^2) \cdots (j^2 - (j-1)^2)((j+1)^2 - j^2) \cdots ((n/2)^2 - j^2) \\ &= (-1)^{j-1}(j+1)(j-1)(j+2)(j-2) \cdots (j + (j-1))(1) \\ &\quad \cdot (2j+1)(1)(2j+2)(2) \cdots (n/2 + j)(n/2 - j) \\ &= (-1)^{j-1} \frac{(j + n/2)!\,(n/2 - j)!}{j \cdot (2j)} = \frac{(-1)^{j-1} n!}{2j^2 \binom{n}{n/2-j}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el sistema (8) se convierte en

$$\begin{cases} jA_j i + B_j = i\,\dfrac{(-1)^j 2j(2ij - s)^{n-1} \binom{n}{n/2-j}}{n!} \\ -jA_j i + B_j = -i\,\dfrac{(-1)^j 2j(-2ij - s)^{n-1} \binom{n}{n/2-j}}{n!}. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema para A_j y B_j se obtiene,

$$\begin{aligned} A_j &= \frac{(-1)^j \binom{n}{n/2-j}}{n!}((2ij - s)^{n-1} + (-2ij - s)^{n-1}), \\ B_j &= \frac{i(-1)^j j \binom{n}{n/2-j}}{n!}((2ij - s)^{n-1} - (-2ij - s)^{n-1}). \end{aligned} \tag{9}$$

Tenemos entonces para todo $1 \leq j \leq n/2$,

$$A_j = \frac{2(-1)^j \binom{n}{n/2-j}}{n!} \Re((2ij - s)^{n-1})\,;\; B_j = \frac{-2j(-1)^j \binom{n}{n/2-j}}{n!} \Im((2ij - s)^{n-1}).$$

Continuando con los cálculos en (5) se tiene,

$$
\begin{aligned}
J_n(s) &= \frac{n}{2^n}\int_{s/2}^{\infty}\left(\frac{A_0}{z}+\sum_{j=1}^{n/2}\frac{A_j z+B_j}{z^2+j^2}\right)dz \\
&= \frac{n}{2^n}\lim_{M\to\infty}\left(\mathrm{A_0}\log(z)+\sum_{j=1}^{n/2}\left(\frac{A_j}{2}\log(z^2+j^2)+\frac{B_j}{j}\arctan(\mathrm{z/j})\right)\right)\Bigg|_{s/2}^{M} \\
&= \frac{n}{2^n}\lim_{M\to\infty}\left(\log\left(\underbrace{z^{\mathrm{A_0}}(z^2+1^2)^{A_1/2}\cdots(z^2+(n/2)^2)^{A_{n/2}}}_{G}\right)\right. \\
&\left.+\sum_{j=1}^{n/2}\frac{B_j}{j}\arctan(z/j)\right)\Bigg|_{s/2}^{M}.
\end{aligned}
$$

En esta última expresión vemos que G es una función en potencias de z. Al comparar los coeficientes de z^n en los numeradores de la descomposición (6) tanto a izquierda como a derecha, se tiene que

$$A_0+A_1+\cdots+A_{n/2}=0,$$

por lo tanto el exponente principal de z en G es nulo, esto implica que $\lim_{M\to\infty}G=1$, entonces

$$
\begin{aligned}
J_n(s) &= \frac{n}{2^n}\left(-\left(\mathrm{A_0}\log(s/2)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n/2}A_j\log(s^2/4+j^2)\right)+\sum_{j=1}^{n/2}\frac{B_j}{j}\arctan(2j/s)\right) \\
&= \frac{n}{2^n}\left(\sum_{j=1}^{n/2}\frac{B_j}{j}\arctan(2j/s)-(A_0\log(s)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n/2}A_j\log(s^2+4j^2))\right).
\end{aligned}
$$

Por otro lado se tiene,

$$(2ij-s)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(2ij)^k(-s)^{n-1-k}=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(2j)^k(-s)^{n-1-k}i^k,$$

que implica

$$
\begin{aligned}
\Re((2ij-s)^{n-1}) &= \sum_{l=0}^{\mathrm{n}/2-1}(-1)^l\binom{n-1}{2l}(2j)^{2l}(-s)^{n-1-2l} \\
&= (-1)^{n-1}\sum_{l=0}^{n/2-1}(-1)^l\binom{n-1}{2l}(2j)^{2l}s^{n-1-2l}
\end{aligned}
$$

y

$$\Im((2ij-s)^{n-1}) = \sum_{l=0}^{n/2-1} (-1)^l \binom{n-1}{2l+1} (2j)^{2l+1}(-s)^{n-2-2l}$$
$$= (-1)^{n-2} \sum_{l=0}^{n/2-1} (-1)^l \binom{n-1}{2l+1} (2j)^{2l+1} s^{n-2-2l}.$$

Por lo tanto, para n par,

$$J_n(s) =$$
$$\frac{n}{2^n}\left(-2(-1)^{n-2}\sum_{j=1}^{n/2}\left((-1)^j\frac{\arctan(2j/s)\binom{n}{n/2-j}}{n!}\sum_{l=0}^{(n-2)/2}(-1)^l\binom{n-1}{2l+1}(2j)^{2l+1}s^{n-2-2l}\right)\right.$$
$$+(-1)^n\sum_{j=1}^{n/2}\left((-1)^j\frac{\log(s^2+4j^2)\binom{n}{n/2-j}}{n!}\sum_{l=0}^{n/2-1}(-1)^l\binom{n-1}{2l}(2j)^{2l}s^{n-1-2l}\right)$$
$$\left.+(-1)^n\frac{s^{n-1}}{(n/2)!^2}\log(s)\right)$$
$$=\frac{1}{(n-1)!\,2^n}\left(-4s^{n-2}\sum_{j=1}^{n/2}\left((-1)^j j\binom{n}{n/2-j}\arctan(2j/s)\sum_{l=0}^{n/2-1}(-1)^l\binom{n-1}{2l+1}(2j/s)^{2l}\right)\right.$$
$$+s^{n-1}\sum_{j=1}^{n/2}\left((-1)^j\binom{n}{n/2-j}\log(s^2+4j^2)\sum_{l=0}^{n/2-1}(-1)^l\binom{n-1}{2l}(2j/s)^{2l}\right).$$
$$\left.+\binom{n}{n/2}s^{n-1}\log(s)\right)$$

Caso 2: Si n es impar. De (4) se tiene que,

$$J_n(s) = n\int_s^\infty \frac{(y-s)^{n-1}}{(y^2+n^2)(y^2+(n-2)^2)\cdots(y^2+1^2)}\,dy. \tag{10}$$

Descomponemos en fracciones parciales,

$$\frac{(y-s)^{n-1}}{(y^2+1^2)(y^2+3^2)\cdots(y^2+n^2)} = \frac{C_1y+D_1}{y^2+1^2}+\frac{C_2y+D_2}{y^2+3^2}+\cdots+\frac{C_{(n+1)/2}y+D_{(n+1)/2}}{y^2+n^2} \tag{11}$$

Multiplicando (11) por $y^2 + (2j-1)^2$ para todo $1 \le j \le \frac{n+1}{2}$, y haciendo respectivamente $y = \pm(2j-1)i$, se tiene

$$\begin{cases} ((2j-1)C_j i + D_j)(1^2 - (2j-1)^2)(3^2 - (2j-1)^2)\cdots(n^2 - (2j-1)^2) \\ = ((2j-1)i - s)^{n-1} \\ (-(2j-1)C_j i + D_j)(1^2 - (2j-1)^2)(3^2 - (2j-1)^2)\cdots(n^2 - (2j-1)^2) \\ = (-(2j-1)i - s)^{n-1}. \end{cases} \quad (12)$$

En la productoria de este sistema no se consideran los factores nulos. Podemos simplificar este producto como en el Caso 1 para n impar, de la siguiente manera

$$(1^2 - (2j-1)^2)(3^2 - (2j-1)^2)\cdots(n^2 - (2j-1)^2) = \frac{(-1)^{j-1}2^n n!}{(4j-2)\binom{n}{(n+1)/2-j}}.$$

El sistema (12) se transforma en,

$$\begin{cases} (2j-1)iC_j + D_j = \dfrac{(-1)^{j-1}((2j-1)i - s)^{n-1}(4j-2)\binom{n}{(n+1)/2-j}}{2^n n!} \\ -(2j-1)iC_j + D_j = \dfrac{(-1)^{j-1}(-(2j-1)i - s)^{n-1}(4j-2)\binom{n}{(n+1)/2-j}}{2^n n!}. \end{cases} \quad (13)$$

Resolviendo este sistema para C_j y D_j se tiene,

$$C_j = \frac{(-1)^{j-1}\binom{n}{(n+1)/2-j}}{2^{n-1}n!}\Im((-s + (2j-1)i)^{n-1}),$$
$$D_j = \frac{(-1)^{j-1}(4j-2)\binom{n}{(n+1)/2-j}}{2^n n!}\Re((-s + (2j-1)i)^{n-1}).$$

Haciendo un análisis similar al Caso 1 y volviendo a (10) se tiene que,

$$J_n(s) = n \cdot \left(\sum_{j=1}^{(n+1)/2} \frac{D_j}{2j-1} \arctan\left(\frac{2j-1}{s}\right) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{(n+1)/2} C_j \log\left(s^2 + (2j-1)^2\right) \right).$$

Por otra parte,

$$\Re((-s + (2j-1)i)^{n-1}) = (-s)^{n-1}\sum_{l=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^l \binom{n-1}{2l}\left(\frac{2j-1}{s}\right)^{2l},$$
$$\Im((-s + (2j-1)i)^{n-1}) = -(-s)^{n-1}\sum_{l=0}^{\frac{n-3}{2}} (-1)^l \binom{n-1}{2l+1}\left(\frac{2j-1}{s}\right)^{2l+1}.$$

Finalmente para n impar y $s > 0$ se tiene,

$$J_n(s) = \frac{(-s)^{n-1}}{2^n(n-1)!} \sum_{j=1}^{(n+1)/2} (-1)^{j-1} \binom{n}{(n+1)/2 - j}$$
$$\cdot \left(2\arctan\left(\frac{2j-1}{s}\right) \sum_{l=0}^{(n-1)/2} (-1)^l \binom{n-1}{2l} \left(\frac{2j-1}{s}\right)^{2l} \right.$$
$$\left. + \log\left(s^2 + (2j-1)^2\right) \sum_{l=0}^{(n-3)/2} (-1)^l \binom{n-1}{2l+1} \left(\frac{2j-1}{s}\right)^{2l+1} \right)$$

Aplicaciones

1) Si $n = 3,\ a > 0, s > 0$,

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin^3(at)}{t^3}\right)^1 = \frac{3a}{8} s \log\left(\frac{s^2 + a^2}{s^2 + 9a^2}\right) + \frac{3\pi(s^2 - a^2)}{16}$$
$$- \frac{1}{8}\left(3(s^2 - a^2)\arctan(s/a) + (s^2 - 9a^2)\arctan\left(\frac{3a}{s}\right)\right).$$

2) Aplicando la propiedad de la derivada de la transformada de Laplace $\mathcal{L}(tf(t)) = -\frac{d}{ds}F(s)$, al ejemplo anterior se tiene para $a > 0, s > 0$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin^3(at)}{t^2}\right) = -\frac{3\pi s}{8} + \frac{3a}{8}\log\left(\frac{s^2 + 9a^2}{s^2 + a^2}\right) + \frac{s}{8}(6\arctan(s/a) + 2\arctan(3a/s)),$$

y también,

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin^3(at)}{t}\right) = \frac{3\pi}{8} - \frac{3}{4}\arctan(s/a) - \frac{1}{4}\arctan(3a/s)$$

3) Si *n* es par y haciendo que s tienda a 0^+ se tiene que,

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt = \frac{(-1)^{3n/2}\pi}{2(n-1)!} \sum_{j=1}^{n/2} (-1)^j \binom{n}{n/2 - j} j^{n-1}.$$

Si *n* es impar se tiene,

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}\pi}{2^n(n-1)!} \sum_{j=1}^{(n+1)/2} (-1)^j \binom{n}{(n-1)/2 - j} (2j-1)^{n-1}.$$

Ambos resultados son conocidos, ver por ejemplo (Fornari, Laeng & Pata, 2021) donde se encuentran resultados más generales.

4) Si $n = 4,\ a > 0, s > 0$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin^4(at)}{t^4}\right) = \frac{1}{96}(s(s^2 - 48a^2)\log((s/a)^2 + 16) - 4s(s^2 - 12a^2)\log((s/a)^2 + 4) \\ +6s^3\log(s/a) + a(-24s^2 + 128a^2)\arctan(4a/s) \\ +a(48s^2 - 64a^2)\arctan(2a/s)). \tag{14}$$

Comentarios

Otra manera de hallar $\mathcal{L}(\sin^n(t))$ es pasando por la función exponencial. Por ejemplo para n impar se tiene

$$\sin^n(t) = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{(2i)^n}\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k}(e^{it})^k(e^{-it})^{n-k}$$

$$= \frac{1}{2^n i^n}\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} e^{it(2k-n)} = \frac{1}{2^n i^n}\sum_{k=0}^{(n-1)/2} (-1)^k\binom{n}{k}(e^{it(n-2k)} - e^{-it(n-2k)})$$

$$= \frac{1}{2^n i^{n-1}}\sum_{k=0}^{(n-1)/2} (-1)^k\binom{n}{k}\sin((n-2k)t).$$

Usando la linealidad de la transformada de Laplace y sabiendo que $\mathcal{L}(\sin(wt)) = \frac{w}{s^2+w^2}$, se tiene para n impar y $s > 0$

$$\mathcal{L}(\sin^n(t)) = \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{(n-1)/2} (-1)^k\binom{n}{k}\frac{(n-2k)}{s^2 + (n-2k)^2}. \tag{15}$$

Podemos obtener un resultado similar para n par. Vemos que (15) nos arroja directamente la descomposición en fracciones parciales de $\mathcal{L}(\sin^n(t))$, a diferencia de (4) donde el mismo se lo expresa como producto. Esta descomposición podría proporcionarnos una manera más directa de calcular los coeficientes de A_j, B_j, C_j, D_j en las descomposiciones dadas en (6) y (11).

De la misma manera podemos hallar $\mathcal{L}(\sinh^n(t))$. Por ejemplo, para n impar se tiene,

$$\sinh^n(t) = \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^n = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{(n-1)/2} (-1)^k\binom{n}{k}\sinh((n-2k)t),$$

y recordando que $\mathcal{L}(\sinh(wt)) = \dfrac{w}{s^2 - w^2}$ se tiene para n impar y $s > 0$,

$$\mathcal{L}(\sinh^n(t)) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{(n-1)/2} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(n-2k)}{s^2-(n-2k)^2}. \tag{16}$$

De manera similar para n par se obtiene,

$$\sinh^n(t) = \frac{1}{2^n}\left((-1)^{n/2}\binom{n}{n/2} + 2\sum_{k=0}^{n/2-1} (-1)^k \binom{n}{k} \cosh((n-2k)t) \right),$$

recordando que $\mathcal{L}(1) = 1/s$ y $\mathcal{L}(\cosh(wt)) = s/(s^2 - w^2)$ se obtiene para n par,

$$\mathcal{L}(\sinh^n(t)) = \frac{1}{2^n}\left(\frac{(-1)^{n/2}}{s}\binom{n}{n/2} + 2\sum_{k=0}^{n/2-1} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{s}{s^2-(n-2k)^2} \right).$$

4. Conclusiones

En el Teorema 1 se obtuvo un resultado general para la transformada de Laplace de la función $sinc^n(t)$ para potencias n naturales. Estos resultados se expresan en términos de funciones usuales y de fácil implementación para realizar cálculos relacionados a esta transformada o a integrales que correspondan. De la misma forma se facilita el análisis analítico y teórico sobre resultados relacionados a esta transformada.

El autor considera que, usando técnicas similares a las empleadas en el presente trabajo, se pueden obtener expresiones generales para $\mathcal{L}\left(\frac{\sin^m(t)}{t^n}\right)$, $\mathcal{L}\left(\frac{\sinh^m(t)}{t^n}\right)$, y posiblemente para $\mathcal{L}\left(\frac{(\sin(t)\sinh(t))^m}{t^n}\right)$, para $m \geq n$ enteros positivos. La búsqueda de expresiones generales para estas transformadas representa entonces futuros trabajos de investigación.

Recomendaciones

El autor considera que el resultado del Teorema 1 y sus consecuencias pueden usarse como complemento a las tablas generales sobre el cálculo de transformadas de Laplace. De igual manera el autor sugiere que el resultado del mencionado teorema pueda ser considerado para su implementación en los principales softwares matemáticos existentes, previa una comparación futura sobre la eficiencia de cálculo, puesto que como se indicó en la introducción del presente artículo, al comparar los tiempos de ejecución del resultado del teorema con aquellos dados por uno de los software matemáticos más potentes de la actualidad como lo es MATHEMATICA, el resultado principal del artículo parece ser bastante práctico.

Agradecimientos

El autor agradece a la Facultad de Ciencias y Tecnología de la Universidad Mayor de San Simón por brindar la oportunidad de publicar resultados teóricos en el área de matemáticas.

5. Referencias bibliográficas

Abel, U., Kushnirevych, V. (2023). Sinc integrals revisited. *Mathematische Semesterbericht, 70,* 147-164.

AlHamad, R. (2020). Laplace transform of the product of two functions. *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics,* 44, 800-804.

Fornari, R., Laeng, E., y Pata, V. (2021). A direct computation of a certain family of integrals. *Arab Journal of Mathematical Sciences,* 27(2), 249-252.

Glasser, M. L. (2021). A note of the Laplace transform of $|\sin x/x|^p$. *SCIENTIA, Series A: Mathematical Sciences*, 31, 57-60.

Gradshteyn, I. S. y Ryzhik, I. M. (2007). *Tables of Integrals, Series and Products*. San Diego, CA: Academic Press.

Oberhettinger, F. y Badii, L. (1973). *Tables of Laplace Transform*. Berlin: Springer-Verlag.

Spiegel, M. R. (1965). *Schaum's Outlines: Laplace Transforms*. New York: McGraw-Hill.

Zill, D. G. (2014). *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado*. Cengage Learning,