Búsqueda de dígitos en secuencia de números naturales

Rimer Zurita

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias y Tecnología, Universidad Mayor de San Simón, Cochabamba, Bolivia

zurita.math@gmail.com

Resumen

Se construye un algoritmo que nos permite encontrar el dígito que corresponde a la posición N-esima de la secuencia de números naturales. El citado algoritmo hace uso de la función W de Lambert y fue implementado en el programa MATHEMATICA, obtiene de manera eficiente resultados para entradas grandes N del orden de 10^1000.

Palabras clave: *Función W de Lambert, MATHEMATICA, Secuencias.*

Abstract

An algorithm is developed to compute the digit corresponding to the N-th position in the sequence of natural numbers. The algorithm makes use of the Lambert W function and was implemented in the MATHEMATICA program. It efficiently obtains results for large inputs N on the order of 10^1000.

Key words: *Lambert W function, MATHEMATICA, Sequences.*

1. Introducción

Dada una secuencia de símbolos cuya construcción está determinada por ciertas reglas preestablecidas, nos preguntamos que símbolo corresponde a una posición N dada. Por ejemplo, la siguiente secuencia de unos y ceros

100111000011111000000…

fue construida de la siguiente manera: comenzamos escribiendo un uno, luego dos ceros, luego tres unos, luego cuatro ceros y así sucesivamente. Nos preguntamos por ejemplo que dígito ocupa la posición número 729 o la posición 13.542.

En el presente trabajo tratamos de responder a un problema similar donde la secuencia está dada por

$$12345678910111213141516171819202122\ldots\ (P)$$

es decir, escribimos los números naturales uno por uno y uno a continuación del otro. Dada la entrada N nos preguntamos que dígito del 0 al 9 corresponde a esta posición. Por ejemplo, si N=10 el dígito es 1, si N=32 el dígito es 2. Este problema fue planteado en concursos de informática y se lo discutió entre los docentes del departamento de Matemáticas de la FCyT.

El problema descrito puede ser resuelto mediante un programa en ordenador usando contadores y controles de iteraciones. Sin embargo, lo que pretendemos en el presente trabajo es la de construir alguna función matemática f(N) o algún algoritmo eficiente que permita encontrar el dígito de la secuencia (P) que corresponde a la posición N, para entradas N, grandes.

2. Materiales y métodos

Serie Geométrica

La serie geométrica está dada por

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x};\ |x| < 1.$$

Se puede derivar e integrar término a término para obtener otras series, por ejemplo, si la derivamos

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k = \frac{1}{(1-x)^2};\ |x| < 1,$$

y si la integramos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\log(1-x);\ |x| < 1.$$

Donde la función log representa en todo el articulo la función logaritmo natural. Para profundizar sobre series puede consultar (Abramowitz et al, 1972).

Aritmética Modular

Decimos que dos enteros *x,y* son congruentes módulo m con $m \in \mathbb{N}$, si *m* divide a la diferencia x-y, escribimos

$$x \equiv y (\mathrm{mod}\ m).$$

Notemos que si dividimos x entre m, $x = mq + r$ donde $0 \le r \le m-1$ es el resto de la división, se tiene

$$x \equiv r\ (\mathrm{mod}\ m).$$

Cuando se trabaja módulo m se trabaja entonces en el anillo Z={0,1,2,…,m-1}, formado por los restos de dividir los números enteros entre m. Existen varias propiedades naturales de las congruencias, por ejemplo

1 Si $x \equiv y (\mathrm{mod}\ m)$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $x^n \equiv y^n (\mathrm{mod}\ m)$.

2 Si $x \equiv y (\mathrm{mod}\ m)$ y $x' \equiv y' (\mathrm{mod}\ m)$, entonces $xx' \equiv yy' (\mathrm{mod}\ m)$.

En el presente articulo escribimos x mod m que significa hallar el resto de dividir x entre m. Para profundizar sobre congruencias puede consultar (Apóstol, 1976)

Función parte entera

Para x real, definimos su parte entera como

$$\lfloor x \rfloor = \text{ el entero más grande menor o igual a } x.$$

Entre algunas propiedades remarcables de esta función se tienen las siguientes:

1) $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \le \lfloor x + y \rfloor \le \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$

2) Si a, b son enteros positivos

$$\sum_{k=1}^{b-1} \lfloor k\frac{a}{b} \rfloor = \frac{(a-1)(b-1) + \mathrm{mcd}(a,b) - 1}{2}.$$

3) Si $f(n) = \sum_{d|n} g(d)$, entonces $g(n) = \sum_{d=1}^{n} \lfloor \frac{n}{d} \rfloor f(d)$.

Para profundizar sobre la función parte entera puede consultar (Graham et al., 1994)

Función *W* de Lambert

La función W(x) de Lambert definida de

$[-\frac{1}{e}, \infty)$ hacia $[-1, \infty)$, es la función inversa de la función real $z \mapsto ze^z$. Entonces por definición $W(x)e^{W(x)} = x$. Esta función viene implementada en varios programas matemáticos como ser Maple, Matlab, Mathematica, Python, Máxima. Gracias a esta función podemos resolver ecuaciones donde la incógnita aparece como exponente o como término libre. Por ejemplo, la ecuación

$$a^x = b(x - r)$$

tiene como solución en x

$$x = r - \frac{1}{\log a} W\left(\frac{-a^r}{b} \log a\right),$$

Para profundizar sobre la función W de Lambert puede consultar (Roy et al., 2010)

3. Resultados y discusión

Dada la secuencia (P) y dado N, queremos hallar una función f(N) que determine el dígito N-esimo de esta secuencia. Observamos que existen nueve números del 1 al 9 con un solo dígito, noventa números del 10 al 99 con dos dígitos, novecientos números del 100 al 999 con tres dígitos, etc. Consideramos entonces la suma

$$S(i) := 9 + 2\cdot 90 + 3 \cdot 900 + \cdots + (i+1)\cdot 9 \cdot 10^i = 9 \cdot \sum_{k=0}^{i} (k+1)\cdot 10^k.$$

Sabemos que para todo x real,

$$\sum_{k=0}^{i+1} x^k = \frac{1 - x^{i+2}}{1-x},$$

derivando respecto a x resuelta

$$\sum_{k=0}^{i}(k+1)x^k = \frac{x^{i+1}\cdot((i+1)x-i-2)+1}{(x-1)^2}.$$

En nuestro caso haciendo x=10, buscamos el índice mayor n tal que

$$S(n) \leq N$$

es decir,

$$\frac{9\cdot(10^{n+1}(10(n+1)-(n+2))+1)}{9^2} \leq N.$$

Haciendo cálculos obtenemos

$$10^{n+1}(9n+8) \leq 9N-1$$
$$10^{n+8/9}(n+8/9) \leq 10^{-1/9}(N-1/9)$$
$$e^{(n+8/9)\log 10}(n+8/9)\log(10) \leq 10^{-1/9}\log(10)(N-1/9)$$
$$(n+8/9)\log(10) \leq W(10^{-1/9}\log(10)(N-1/9))$$
$$n \leq \frac{1}{\log(10)}W(10^{-1/9}\log(10)(N-1/9))-8/9.$$

Usando el hecho de que la función W de Lambert es creciente, se obtiene

$$n = \left\lfloor\frac{1}{\log(10)}W(10^{-1/9}\log(10)(N-1/9))-8/9\right\rfloor.$$

Calculamos ahora

$$S(n) = \frac{10^{n+1}(9n+8)+1}{9},$$

el dígito que buscamos se encuentra en el intervalo [10^(n+1),10^(n+2)) y S(n) representa la cantidad de dígitos hasta 10^(n+1)-1. Consideramos ahora

$$a := N - S(n),$$

que indica la cantidad de dígitos aún por contar desde 10^(n+1) hasta encontrar el dígito N- esimo de la secuencia (P).

Sea

$$c := \left\lfloor\frac{a}{n+2}\right\rfloor\ ;\ r := a \bmod (n+2).$$

A partir de 10^n los dígitos aparecen de n+2 en n+2, entonces c representa la cantidad de números que recorrimos desde 10^(n+1) y r el resto encontrado hasta hallar el N- esimo número de la secuencia.

Sea

$$M := 10^{n+1} + c - 1,$$

que representa el último número antes de hallar el N-esimo dígito. Tenemos dos casos

- Si $r = 0$, entonces el dígito $N-$esimo es M mod 10.
- Si $1 \leq r \leq n+1$, el dígito $N-$esimo es $\left\lfloor\frac{M+1}{10^{n+2-r}}\right\rfloor$ mod 10.

Todo el proceso explicado se puede resumir en el algoritmo de la Figura 1.

Algoritmo 1: Algoritmo de búsqueda del dígito $N-$ esimo

Data: N
Result: Dígito de la secuencia (P) que corresponde a la posición $N-$esima

$n \leftarrow \left\lfloor\frac{1}{\log(10)}W(10^{-1/9}\log(10)(N-1/9))-8/9\right\rfloor$;
$S \leftarrow \frac{10^{n+1}(9n+8)+1}{9}$;
$a \leftarrow N - S$;
$c \leftarrow \lfloor a/(n+2)\rfloor$;
$r \leftarrow a \bmod (n+2)$;
$M \leftarrow 10^{n+1}+c-1$;
if $r == 0$ **then**
  Mostrar M *(Número donde se encuentra el dígito $N-$ esimo);
  Mostrar M mod 10 *(Dígito N-esimo encontrado);
  Mostrar $n+2$ *(Posición del dígito $N-$ esimo en el número M);
else
  Mostrar $M+1$;
  Mostrar $\lfloor(M+1)/10^{n+2-r}\rfloor$;
  Mostrar r.

Figura 1. Algoritmo para la búsqueda del digito N-esimo de la secuencia de números naturales.

El algoritmo descrito fue implementado en MATHEMATICA, se obtuvieron los resultados que se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1

Simulación numérica usando MATHEMATICA para hallar el dígito N-esimo de la secuencia (P) de números naturales

N	Dígito	Número que corresponde	Posición del número que corresponde
10^3	3	370	1
10^6	1	185185	1
10^{15}	2	72.222.222.222	3
10^{20}	3	5.321.637.426.900.584.795	6
10^{25}	2	421.296.296.296.296.296.296.296	7

4. Discusión

Se ha construido un algoritmo que nos permite hallar de manera eficiente el dígito N- esimo que corresponde a la secuencia (P). Algoritmos similares pueden ser construidos si la secuencia está dada por los números naturales escritos en cualquier otra base, por ejemplo, en binario o en base hexadecimal.

Podemos tratar de generalizar el problema propuesto de la siguiente manera. Dada una secuencia de números naturales

$$f(1)f(2)f(3)f(4)\cdots$$

donde $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, hallar el dígito N - esimo que corresponde a dicha secuencia. Por ejemplo $f(n)=n^2$ o $f(n)=n^3$. Este problema queda abierto para futuras investigaciones.

Debemos comenzar a familiarizarnos cada vez más con el uso y empleo de funciones especiales como la función W de Lambert, la función Gamma, la función Zeta de Riemann, las funciones Polilogarítmicas, etc. Todas estas funciones vienen ya implementadas en diferentes programas matemáticos, y estas poseen propiedades que nos permiten resolver problemas de distinto índole y dificultad.

5. Recomendaciones

Se recomienda resolver la generalización del problema descrita en la sección anterior. El algoritmo construido debe ser capaz de calcular de manera eficiente el dígito N- esimo de secuencias para entradas N de números grandes.

Agradecimientos

Agradecimiento especial a Álvaro Carrasco, quien me propuso el presente problema y con quien discutimos posibles soluciones.

6. Referencias bibliográficas

Abramowitz, M. and Stegun, I.A. (1972) Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. Dover Publ., Inc., New York.

Apostol, T. M. (1976) Introduction to Analytic Number Theory. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York. doi: 10.1007/978-1-4757-5579-4

Graham R.L., Knuth D.E. and Patashnik O. (1994), Concrete Mathematics, Reading Ma.: Addison-Wesley.

Roy, R.; Olver, F. W. J. (2010), Lambert W function, in Olver, Frank W.J.; Lozier, Daniel M.; Boisvert, Ronald F.; Clark, Charles W. (eds.), NIST Handbook of Mathematical Functions, Cambridge University Press.